

DM cvičení 0 – 3. 10. 2016

Příklad 1. Dokažte matematickou indukcí, že

$$4|6n^2 + 2n$$

Příklad 2. Dokažte matematickou indukcí, že šachovnice velikosti $2^n \times 2^n$ lze vydláždit kostičkami tvaru L o třech dílkách tak, že je právě jedno políčko šachovnice nevydlážděné.

Příklad 3. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n , které neobsahují dvě nuly těsně vedle sebe, je roven F_{n+2} .

Příklad 4. Tvzení: Všichni koně mají stejnou barvu.

Důkaz: Indukcí podle počtu koní. Máme-li jednoho koně, pak zjevně všichni koně mají stejnou barvu. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny skupiny N koní a chceme jej dokázat pro $N + 1$ koní. Vezměme tedy skupinu $N + 1$ koní. Je-li v ní kůň jiné barvy, než všichni ostatní, pak vypustíme libovolného jiného koně. Z indukce mají všichni koně v této skupině stejnou barvu, což je spor s tím, že některý z $N + 1$ koní měl jinou barvu. \square

Kde je problém?

Příklad 5. Dokažte matematickou indukcí následující vzorečky:

$$\sum_{i=1}^n 4i + 5 = 2n^2 + 7n$$

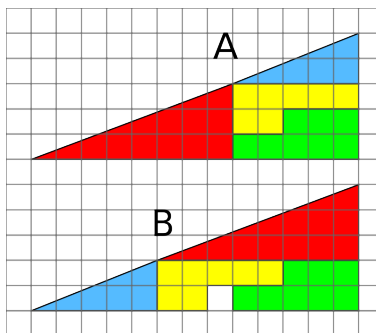
$$\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$$

Příklad 6. Dokažme indukcí následující tvrzení. Necht' p_1, \dots, p_n je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.

1. Pro $n = 2$ tvrzení platí.
2. Necht' tvrzení platí pro n_0 přímek. Mějme $n = n_0 + 1$ přímek p_1, \dots, p_n . Podle indukčního předpokladu mají přímky p_1, \dots, p_{n-1} společný bod, označme ho x . Stejně tak mají přímky p_1, \dots, p_{n-2}, p_n společný bod y . Přímka p_1 leží v obou skupinách, tedy jsou na ní oba body x a y . Totéž platí i pro přímku p_{n-2} . Jelikož jsou přímky p_1 a p_2 podle předpokladu různoběžné, protínají se jen v jednom vrcholu. A tedy $x = y$, což je společný bod přímek p_1, \dots, p_n .

Kde je problém?

Příklad 7. Rozdělením trojúhelníku na části a jejich přeskládáním dostaneme trojúhelník, který je o 1 čtvereček menší. Jak je to možné?



Příklad 8. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.