DM cvičení 1 – 10. 10. 2016

Příklad 1. Na tyči dlouhé 1m je rozmístěno 101 mravenců (1cm od sebe). Ve chvíli startu se každý mravenec rozeběhne buď vlevo nebo vpravo rychlostí $10^{-1} m.s^{-1}$. Ve chvíli, kdy se mravenci potkají, oba se otočí a běží opačným směrem. Mravenec, který přeběhne přes okraj tyče spadne dolů a dál se našeho příkladu neúčastní. Určete nejbližší okamžik od startu, ve kterém se již na tyči nebude nacházet ani jeden mravenec.

Příklad 2. Dokažte matematickou indukcí, že $\forall n \geq 1$ platí $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Příklad 3. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Příklad 4. Dokažte, že $\forall n \geq 0$ platí $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

Příklad 5. Dokažte, že když n je liché číslo, pak i n^2 je liché číslo.

Příklad 6. Dokažte, že $8 \mid n^2 - 1$ pro každé liché kladné číslo n.

Příklad 7. Dokažte, že $(F_n)^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Příklad 8. Určete kolik nejvýše věží lze rozmístit na čtvercovou šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali. Ukažte horní i dolní odhad.

Příklad 9. Určete kolik nejvýše střelců lze rozmístit na čtvercovou šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali. Ukažte horní i dolní odhad.

Příklad 10. Dokažte, že $3 \mid F_{4n}$ pro $n \geq 1$.

Příklad 11. Označme D_n počet způsobů, jakými jde vydláždit obdélník $2 \times n$ pomocí domin (kostiček 1×2). Zjevně $D_1 = 1, D_2 = 2, D_3 = 3$. Odhadněte vzorec pro D_n a dokažte indukcí, že je správný.

Příklad 12. Dokažte, že každé kladné celé číslo větší než 1 lze rozložit na součin prvočísel.

Příklad 13. Dokažte, že $3^n > n^2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 14. Nechť n_0 je nejmenší přirozené číslo takové, že $\forall n \geq n : \forall x > 0 : (1+x)^n > 1 + nx + nx^2$. Najděte n_0 a dokažte, že pro všechna větší přirozená čísla vzorec platí.

Web cvičení: `http://kam.mff.cuni.cz/~stinovlas/`
E-mail: `stinovlas@kam.mff.cuni.cz`