DM cvičení 3 – 24. 10. 2016

Příklad 1. Buďte R a S tranzitivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také tranzitivní?
$R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \Delta S$, $R \circ S$, R^{-1}

Příklad 2. Nechť R je relace na $X = \{1, 2, 3, 4\}$ daná výčtem dvojic $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$. Určete relaci $R \circ R$ a rozhodněte, zdali je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 3. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pomocí předpisu $f(x) = x^2 - 1$. Je toto zobrazení prosté? Je na? Mějme zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované stejným předpisem. Je toto zobrazení prosté? Je na?

Příklad 4. Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární? Jaké jsou jejich minimální, maximální, nejmenší a největší prvky?

a) Porovnání v obou složkách $\leq_A$: $(a, b) \leq_A (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$
b) Porovnání v obou složkách, ve druhé opačně $\leq_B$: $(a, b) \leq_B (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \geq d$
c) Porovnání součtu obou složek $\leq_+$: $(a, b) \leq_+ (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c + d$
d) Rovnost v první složce a porovnání ve druhé $\leq_C$: $(a, b) \leq_C (c, d) \Leftrightarrow a = b \wedge c \leq d$

Příklad 5. Rozhodněte, zda může existovat uspořádání na neprázdné konečné množině:

a) bez největšího prvku
b) bez největšího i nejmenšího prvku
c) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem
d) bez maximálního prvku, ale s největším prvkem

Příklad 6. Rozhodněte, zda může existovat uspořádání na nekonečné množině:

a) bez největšího i nejmenšího prvku
b) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem
c) bez maximálního prvku, ale s největším prvkem
d) bez nekonečného řetězce

Příklad 7. Může existovat uspořádání na nekonečné množině, které obsahuje nekonečný řetězec i antiřetězec? Pokud ano, najděte nějaké takové.

Příklad 8. Určete počet různých ekvivalencí na pětiprvkové množině.

Příklad 9. Uvažme neorientovaný graf G a relaci R na jeho vrcholech takovou, že $(u, v) \in R$ právě tehdy, když mezi u a v vede cesta.

a) Dokažte, že R je ekvivalence.
b) Určete třídy ekvivalence relace R.

Příklad 10. Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních:

a) $(\{1, \ldots, n\}, |)$
b) $(2^{\{1,\ldots,n\}}, \subseteq)$
c) $(\mathbb{N}, R)$, kde $\forall x, y \in \mathbb{N} : xRy \Leftrightarrow x + y < 1$
d) $(\mathbb{N}, S)$, kde $\forall x, y \in \mathbb{N} : xSy \Leftrightarrow x - y < 1$

Web cvičení: `http://kam.mff.cuni.cz/~stinovlas/`
E-mail: `stinovlas@kam.mff.cuni.cz`