Diskrétní matematika 2016/2017

1. série

Termín odevzdání: 3. 11. pro čtvrteční cvičení, 7. 11. pro pondělní cvičení.

Všechny kroky se snažte pečlivě zdůvodnit, je to důležitější, než mít správný výsledek. Věty z přednášek a ze cvičení můžete používat bez důkazu, jen vždy uveďte, co právě používáte.

1.1 Hrátky se zobrazením (2,5 bodu)

Navrhněte příklad konkrétního zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ takového, že:

a) f není prosté ani na
b) f je prosté, ale není na
c) f je na, ale není prosté
d) f je prosté i na[1]

1.2 Chyba v indukci (2,5 bodu)

Mějme následující tvrzení: *Každé celé číslo $n \geq 2$ má jednoznačný prvočíselný rozklad, až na pořadí činitelů.* Např. číslo 60 má prvočíselný rozklad $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$. Tvrzení dokážeme indukcí.

I. Číslo 2 má zjevně pouze jeden prvočíselný rozklad $P(2) = 2$.

II. Předpokládejme, že $\forall k < n$ tvrzení platí a dokážeme, že platí i pro n. Rozlišíme dva případy.

   a) Číslo n je prvočíslo. Pak má zjevně pouze jeden prvočíselný rozklad $P(n) = n$.

   b) Číslo n je složené, tedy $n = rs$ tž. $r < n$ a $s < n$. Pak z indukčního předpokladu čísla r a s mají jednoznačné prvočíselné rozklady $P(r) = \prod p_i$ a $P(s) = \prod q_j$. Tedy číslo n má jednoznačný rozklad $P(n) = \prod p_i \prod q_j$ (až na pořadí činitelů).

$\square$

Tento důkaz má v sobě jednu kritickou chybu, kvůli které nefunguje. Najděte ji a vysvětlete v čem je problém. Pozor! Ačkoliv důkaz je chybný, tvrzení samo o sobě je pravdivé. Proto vám na něj nepůjde najít protipříklad =o).

1.3 Neohrožení jezdci (2,5 bodu)

Kolik nejvíce jezdců lze rozložit na šachovnici velikosti $n \times n$ tak, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali? Svůj odhad dokažte.

1.4 Spořádané uspořádání (2,5 bodu)

Najděte takové uspořádání (X, R), které obsahuje nekonečně mnoho nekonečných řetězců a nekonečně mnoho nekonečných antiřetězců.

[1] takové zobrazení nazýváme *bijekce*

1.5 Vtipná úloha[2] (až +2 body)

Vymyslete krátký (ale matematicky korektní) vtip či humornou historku o relacích, zobrazeních či uspořádáních. Veršované verze jsou vítány.

[2]Odevzdáním této úlohy udělujete souhlas se zveřejněním svého řešení na webu cvičícího. Tato úloha je bonusová, tj. je vypsána navíc nad slíbených 50 bodů za úkoly.