Diskrétní matematika 2016/2017

4. a 5. série

Termín odevzdání: 9. 1. pro pondělní cvičení, 12. 1. pro čtvrteční cvičení.

Všechny kroky se snažte pečlivě zdůvodnit, je to důležitější, než mít správný výsledek. Věty z přednášek a ze cvičení můžete používat bez důkazu, jen vždy uveďte, co právě používáte.

4.1 Skóre (3 body)

U následujících posloupností určete, zda se jedná o skóre grafu. Pokud ano, graf nakreslete (a k jednotlivým vrcholům připište jejich stupně). Pokud ne, zdůvodněte proč.

a) (3,3,3,3,3,3,3,3)

b) (3,3,3,3,3,3,6)

c) (1,1,4,4,4,4,5)

d) (3,3,3,3,3,5,6,6,6,6,6,6,6,6) – v tomto případě určete, zda existuje bipartitní graf s tímto skóre

4.2 Hamiltonovská kružnice (3 body)

Hamiltonovská kružnice je kružnice procházející všemi vrcholy grafu. Najděte dva souvislé grafy se stejným skóre, z nichž jeden obsahuje Hamiltonovskou kružnici a druhý ne.

4.3 Rovinný graf bez C_3 a C_4 (4 body)

Určete, jaký nejvyšší počet hran může obsahovat rovinný graf, který neobsahuje kružnice délky 3 a 4.

5.1 Vnějškově rovinné grafy (3 body)

Vnějškově rovinný graf je takový graf, pro který existuje rovinné nakreslení, ve kterém všechny vrcholy náleží vnější stěně.

Dokažte, že vnějškově rovinné grafy jsou 4-degenerované (tedy, že vnějškově rovinný graf i všechny jeho podgrafy obsahují vrchol stupně nejvýš 4). Jde tento odhad ještě zlepšit? Tj. existuje $k < 4$ takové, že všechny vnějškově rovinné grafy jsou k-degenerované?

5.2 Charakterizace (3 body)

Charakterizujte grafy, které neobsahují jako podgraf P_4, tedy cestu na čtyřech vrcholech.

Charakterizací rozumíme výčet možností, jak musí vypadat graf, resp. každá jeho komponenta. Např. v grafu bez P_2 je každá komponenta izolovaný vrchol. V grafu bez P_3 je každá komponenta buď izolovaný vrchol, nebo dva vrcholy spojené hranou. Jiná charakterizace grafu bez P_3 by mohla být, že všechny jeho komponenty mají nejvýše dva vrcholy.

5.3 Konstrukce (4 body)

Uvažme následující konstrukci: Začneme jedním vrcholem. Jedním krokem konstrukce bude přidání dvou nových vrcholů spojených hranou. Oba tyto vrcholy spojíme s některými dalšími vrcholy v grafu (nejméně jedním), oba se stejnými. Třídu grafů, které můžeme získat touto konstrukcí nazveme $\mathcal{G}$.

Rozhodněte (a dokažte), zda pro každý graf $G \in \mathcal{G}$ platí:

- G je eulerovský.
- G obsahuje Hamiltonovskou kružnici.
- G je bipartitní.
- G neobsahuje cyklus délky 6.
- G je rovinný.